

## 16А. ДЕРЕВЬЯ

- 1°** Шесть компьютеров стоят в кабинете, и ни один ни с одним не соединён. Каждый день системный администратор соединяет кабелем какие-нибудь два. Автономной зоной назовём набор компьютеров, между любыми двумя из которых можно передать данные — напрямую или через другие компьютеры, — и такой, что ни с одним компьютером снаружи обмена нет.
- а) Как может измениться число автономных зон за один день?
- б) Какого наименьшего числа кабелей хватит, чтобы все шесть компьютеров оказались в одной зоне?
- 2°**  Из спичек длины 1 сложена клетчатая доска  $8 \times 8$ . Жук хочет, чтобы с любой клетки он мог доползти до любой другой, не переползая через спички. Какое наименьшее число спичек придётся убрать?
- 3°**  Даны восемь камней, все разного веса. Есть весы, позволяющие сравнить по весу любые два камня. Какое наименьшее число взвешиваний нужно, чтобы наверняка найти самый тяжёлый камень?
- 4°**  Сколько рёбер куба максимум можно перекусить посередине, чтобы он не распался на части?
- 5°**  Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника  $3 \times 5$  клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась на куски?
- 6°** В классе 20 человек. Компанией назовём набор ребят, любые двое из которых связаны цепочкой знакомств внутри этого набора и который ни с кем снаружи не знаком.
- а) В классе ровно 16 пар знакомых. На какое наименьшее число компаний может разбиться класс?
- б) Класс разбился ровно на четыре компании. Какое наименьшее число пар знакомых в нём?
- \* \* \*
- 7°** Дан граф с  $n$  вершинами. Докажите, что  а) если граф связан, то в нём не менее  $n - 1$  рёбра;
- б) если граф распадается на  $k$  компонент связности, то в нём не менее  $n - k$  рёбер;
- в) если в связном графе есть цикл, то любое ребро этого цикла можно удалить (концы остаются на месте), и граф останется связным.
- 8<sup>†</sup>**  Пусть граф связан. Докажите, что следующие свойства равносильны: • в графе нет циклов; • при удалении любого ребра граф перестаёт быть связным; • рёбер на одно меньше, чем вершин. Граф, обладающий этими свойствами, называется *деревом*.
- 9°**  Два графа называют *изоморфными*, если вершины одного можно занумеровать вершинами другого так, что рёбра перейдут в рёбра. Сколько существует попарно неизоморфных деревьев на шести вершинах? Нарисуйте их все.
- 10°**  а) В связном графе 9 вершин и 14 рёбер. Какое наименьшее число рёбер надо удалить, чтобы в графе не осталось ни одного цикла?  б) Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть часть рёбер так, чтобы получилось дерево с теми же вершинами. Такое дерево называют *остовом* исходного графа.
- 11°** Вершину степени 1 называют *висячей*, или *листом*.
- а) Докажите, что в дереве больше чем с одной вершиной есть висячая вершина. (идите по рёбрам, каждый раз выбирая то, по которому ещё не шли)  б) Докажите, что таких вершин хотя бы две.
- в) Сколько висячих вершин может быть у дерева с  $n$  вершинами?
- 12\***  Система станций метро устроена так, что из каждой станции можно проехать в каждую. Докажите, что одну из станций можно закрыть, запретив проезжать через неё, так, что это свойство сохранится для оставшихся.
- 13\***  $N$ -угольник разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Построим граф, соответствующий этому разбиению: отметим внутри каждого треугольника точку, соединяя две точки ребром ровно в том случае, когда соответствующие точкам треугольники имеют общую сторону. Докажите, что  а) этот граф будет деревом;  б) хотя бы у двух треугольников разбиения две стороны совпадают со сторонами  $N$ -угольника (если треугольников больше одного).