

## 11. СООТВЕТСТВИЯ

**Определение 1.** Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называется множество

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Элемент  $(a, b)$  — упорядоченная пара; важно, на каких местах стоят  $a$  и  $b$ . Например  $(1, 2) \neq (2, 1)$ .

**1°**  а) Выпишите элементы множеств  $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$ ,  $\{0, x\} \times \{0, x\}$ ,  $\{x, y, z\} \times \emptyset$ .

б) Пусть  $A$  содержит  $n$  элементов,  $B$  —  $m$  элементов. Сколько элементов в  $A \times B$ ?

Про  $A \times B$  удобно думать как про таблицу: строки отвечают элементам  $A$ , столбцы — элементам  $B$ . Упорядоченной паре  $(a, b) \in A \times B$  соответствует клетка на пересечении строки  $a$  и столбца  $b$ .

**2** Найдите число двудольных графов с долями  $A$  и  $B$ , если в  $A$  есть  $n$  элементов, в  $B$  —  $m$ .

**Определение 2.** Соответствием<sup>2</sup> между множеством  $A$  и множеством  $B$  называется подмножество

$$R \subset A \times B.$$

Если множества  $A$  и  $B$  конечны,  $R$  можно представить как таблицу, клетки которой покрашены в два цвета. Клетка на пересечении строки  $a$  и столбца  $b$  закрашена, если  $(a, b) \in R$ .

**Пример 1.** Пусть  $S$  — множество учеников класса, а  $M$  — множество месяцев года. Рассмотрим соответствие  $R \subset S \times M$ , заданное правилом:  $(s, m) \in R$  тогда и только тогда, когда  $s$  родился в месяце  $m$ .

**Пример 2.** Пусть  $\mathcal{T}$  — множество треугольников на плоскости, а  $P$  — множество точек плоскости. Рассмотрим соответствие  $R \subset \mathcal{T} \times P$ , состоящее из пар  $(\Delta, p)$ , для которых  $p$  является вершиной  $\Delta$ .

Практически любое свойство в математике можно рассматривать как соответствие.

**3°**  а) Опишите, как по соответствию  $R \subset A \times B$  построить двудольный граф с долями  $A$  и  $B$ , и как по такому графу восстановить соответствие.  б) Как найти число рёбер этого графа, глядя на соответствие?  в) Тот же вопрос степень вершины  $a \in A$  и  $b \in B$ .

**4°** Пусть  $X = \{1, \dots, 9\}$  и соответствие  $R \subset X \times X$  задано условием:  $(a, b) \in R \iff a$  делится на  $b$ .

а) Изобразите  $R$  в виде таблицы  $9 \times 9$ , раскрашенной в два цвета.

б) Изобразите  $R$  в виде двудольного графа.

**Определение 3.** Соответствие  $R \subset A \times B$  называется взаимно-однозначным соответствием между множеством  $A$  и множеством  $B$  (или биекцией из  $A$  в  $B$ ), если выполняются два условия

- для каждого элемента  $a \in A$  существует ровно один  $b \in B$  такой, что  $(a, b) \in R$ ;
- и наоборот, для каждого  $b \in B$  существует ровно один  $a \in A$  такой, что  $(a, b) \in R$ .

**5**  а)° Являются ли соответствия из примеров 1 и 2 биекциями?  б)° Рассмотрим двудольные графы для соответствий из примеров 1 и 2. Какова степень вершин этих графов?

**6°** Сформулируйте условие биективности  $R$  в терминах двудольного графа.

**7°** Найдите число биекций между  $A$  и  $B$ , если в  $A$  есть  $n$  элементов, в  $B$  —  $m$  элементов.

**8** Рассмотрим множества  $A, B, C$ . Постройте биекцию между множествами

а)  $A \times B$  и  $B \times A$   б)  $(A \times B) \times C$  и  $A \times (B \times C)$ .

**9**  а) Пусть существуют биекции из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $C$ . Постройте биекцию из  $A$  в  $C$ .

б) Пусть существуют биекции из  $A$  в  $B$  и из  $C$  в  $D$ . Постройте биекцию из  $A \times C$  в  $B \times D$ .

\*\*\*

**10**  а) Сформулируйте определение ориентированного графа на языке теории множеств.

б) Сколько существует ориентированных графов на  $n$  вершинах?

<sup>1</sup>формально говоря,  $(a, b) = (c, d) \iff a = c, b = d$

<sup>2</sup>часто вместо термина *соответствие* используют термин *отношение* — это синонимы

**Определение 4.** *Графом* называется множество  $V$  и соответствие  $E \subset V \times V$  такое, что <sup>3</sup>

$$(v, v) \notin E \text{ для всех } v \in V, \quad (u, v) \in E \iff (v, u) \in E.$$

Элементы  $V$  называются *вершинами графа*. Если  $(u, v) \in E$ , говорят, что  $u$  и  $v$  *соединены ребром*.

  **11** Сформулируйте определение изоморфизма графов на языке теории множеств.

---

<sup>3</sup>первое свойство соответствия  $R$  называется *антирефлексивностью*, второе *симметричностью*