

МНОЖЕСТВА

Множества и элементы. Множество — это «совокупность» объектов (элементов). Она может состоять из чисел, точек на плоскости, людей, букв слова и т.д. Можно проверить, принадлежит ли элемент a множеству M . Если принадлежит, говорят также « M содержит a », « a — элемент M », и пишут: $a \in M$. Если a не принадлежит M , пишут $a \notin M$.

Теорию множеств можно вводить строго, с помощью аксиом (при этом понятие множества будет неопределяемым), но мы сейчас пользуемся *наивной теорией множеств*, без полной строгости.

Например, $\{2, 3, 5\}$ — множество из трёх чисел; $\{\text{Павел Алексеевич}, \text{Антон Михайлович}\}$ — множество ваших учителей технологии; $\{м, а\}$ — множество букв слова «мама» (порядок не важен, повторяющиеся буквы входят по одному разу).

Подмножество и равенство.

Мы говорим, что A — подмножество B ($A \subset B$), если каждый элемент A лежит и в B . Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то A и B равны ($A = B$).

Например, чётные числа — подмножество целых:

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ делится на } 2\} \subset \mathbb{Z}$$

Все плоды цитрусовых — фрукты: $\{\text{плоды цитрусовых}\} \subset \{\text{фрукты}\}$.

$\emptyset$ — пустое множество, в нём не лежит никакой элемент.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых чисел.
 $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, то есть чисел, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
 $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел или числовая прямая.

1° а) Сформулируйте, что значит, что множество A не является подмножеством B .

б) Убедитесь, что множество живых фиолетовых крокодилов в Москва-реке является подмножеством множества натуральных чисел.

Откуда в математике берутся множества? Вот несколько их источников.

1. Иногда можно выписать полный список элементов множества, как в примерах выше.
2. Для обозначения некоторых множеств заданы спецсимволы, см. текст в рамочке выше.
3. Когда мы работаем с некоторым множеством U (например, целыми числами, точками плоскости, учениками класса), мы можем выделить подмножество элементов, удовлетворяющих условию:

$$S = \{x \in U \mid x \text{ обладает данным свойством}\}, \text{ например:}$$

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n : 7\}, \quad T = \{x \in \text{ученики нашего класса} \mid x \text{ ездил в Тверь}\}.$$

Операции над множествами. Новые множества можно образовывать из уже имеющихся посредством следующих операций:

- **Пересечением** множеств A и B (обозначение: $A \cap B$) называется множество элементов, принадлежащих и множеству A , и множеству B .
- **Объединением** множеств A и B (обозначение: $A \cup B$) называется множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B .
- **Разностью** множеств A и B называется множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

2° Рассмотрим на плоскости: Q — множество всех четырёхугольников, C — множество всех выпуклых четырёхугольников, T — множество всех трапеций, P — множество всех параллелограммов, R — множество всех ромбов, H — множество всех прямоугольников.

а) Верно ли, что: $P \subset H$? $P \subset Q$? $R \subset P$? $T \subset C$? $H \subset T$?

б) Найдите: $Q \cap P$; $R \cap H$; $P \cup T$; $Q \cup H$; $Q \setminus C$; $R \setminus C$; $T \setminus R$.

3° Пусть A — множество решений уравнения $13x + 6y = 16$ (то есть пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих этому уравнению, иными словами $A = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 13x + 6y = 16\}$); аналогично, B — множество решений уравнения $17x - 3y = 39$.

а) Верно ли, что $(1; 0,5) \in A$? $(13; 14) \in A$? $0 \in A$? $x \in A$? $(0; -13) \in B$? $(x; y) \in B$? $A \subset B$?

б) Найдите $A \cap B$.

в) Схематично изобразите множество точек декартовой плоскости с координатами $(x; y)$, удовлетворяющих каждому из уравнений.

4 Поймите, какие объекты описаны ниже.

- а) A, B — точки на плоскости π , $P = \{X \in \pi \mid AX = BX\}$. Тогда P —
- б)° M — некоторое множество, N — множество, каждый элемент которого — некоторое двухэлементное подмножество множества M . Тогда пара M, N называется
- в) $T = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 7m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$.

5° Даны множества $A = \{57, 91, 179, 239\}$, $B = \{91, 239, 2025\}$, $C = \{2, 57, 239, 2025\}$, $D = \{2, 91, 2025, 2026\}$.
Найдите следующие множества:

- а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $(A \cap (B \cap C)) \cap D$;
- г) $(A \cup D) \setminus (B \cup C)$; д) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$.

6 Существуют ли такие подмножества A и B целых чисел, что все три множества $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \cap B$ бесконечны?

7° Какие из равенств верны для любых множеств A, B, C ?

- а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; б) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
- в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$; г) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$;

Чтобы доказать, что множества X и Y равны, надо проверить, что каждый элемент множества X принадлежит Y , и наоборот. Приведите доказательство верных равенств и контрпримеры к неверным.

8 Докажите, что если какое-то равенство, содержащее множества и операции $\cap, \cup, \setminus$, неверно, то для него существует контрпример, в котором множества пусты или состоят из 1 элемента.

9* Докажите принцип двойственности: если в тождестве, использующем только знаки объединения и пересечения, заменить все символы « $\cup$ » на « $\cap$ », а « $\cap$ » на « $\cup$ », то оно останется верным.

10 :) Докажите, что не существует множества

- а) натуральных чисел, которых нельзя описать фразой короче 20 слов;
- б) всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента;
- в) всех множеств.

11° Сколько а) элементов; б) подмножеств у каждого из множеств:

$$\{0\}, \emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{\emptyset\}, \{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, 3\}?$$

12° а) Может ли у множества быть ровно 0 подмножеств? 5? 16?

б) Сколько подмножеств у множества из n элементов?

в) Пусть множество A содержит n элементов, а его подмножество B — k элементов. Сколько существует множеств C , для которых $B \subset C \subset A$?

13 Даны три множества A, B, C .

а) Может ли у множества A быть ровно на 2000 подмножеств больше, чем у B ?

б) Может ли у множества A быть ровно 2000 подмножеств, не являющихся ни подмножествами множества B , ни подмножествами множества C ?

14 У конечного множества M больше подмножеств с чётным или с нечётным числом элементов?

15 а) Рассмотрим множества $A_1, \dots, A_n$. Сколько различных выражений можно составить из них с помощью (многократно используемых) операций пересечения, объединения и разности? Два выражения считаются одинаковыми, если они равны для любых $A_1, \dots, A_n$.

16** Множество U содержит $2n$ элементов. В нём выделено k подмножеств, причём ни одно из них не является подмножеством другого. Каково может быть максимальное значение числа k ?